Des exemples de preuves par induction

RYAN KAVANAGH

Pour vous guider avec le processus de preuve par induction, voici quelques exemples de preuves où je mets en *italique* mes pensées lors de la rédaction de la démonstration. Elles ne font pas partie de la preuve ! Pour faciliter la lecture de la preuve, je donne ensuite deux versions : une version sous forme de paragraphes sans mon monologue interne et une version sous forme de liste déductive. Les deux (ansi qu'un mélange des deux) sont acceptables !

La seule façon d'apprendre à faire des preuves par induction est d'en faire des dizaines. Je vous suggère de lire les preuves que je vous donne et ensuite d'essayer de les refaire vous-même sans regarder à ma preuve. Encore une fois, je vous encourage de lire le chapitre 2 de PFPL qui traite de l'induction et d'essayer les exercices trouvés à la fin du chapitre.

1 Finalité des valeurs

Proposition 1.1. *Pour toute expression e, ce n'est pas le cas que e* val *et qu'il existe simultanément une expression e' tel que $e \mapsto e'$.*

Démonstration. *Le résultat que je veux prouver est de la forme "pour tout x, une propriété P de x". Ça veut dire qu'il faut que je démontre P pour un x arbitraire.*

Soit une expression e arbitraire.

La proposition que je veux démontrer est de la forme "ce n'est pas le cas que P". Pour démontrer la négation de P, il faut que je suppose temporairement que P est vrai avec l'objectif de démontrer une contradiction. On utilise souvent la formule "supposons au contraire que P" ("suppose to the contrary that P").

Supposons au contraire que e val et qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$.

Là je suis obligé de démontrer une contradiction. Qu'est-ce que je sais qui pourrait m'aider à trouver cette contradiction ? Seulement que e val *et que $e \mapsto e'$. Ces deux jugements sont définis par induction, donc je pourrais essayer de faire une induction sur la dérivation d'un des deux. Sur lequel des deux jugements est-ce que je ferai l'induction ? Il n'y a rien qui suggère a priori qu'un des choix est meilleur que l'autre, mais je vois qu'il y a seulement trois règles pour les valeurs, mais 12 règles pour les réductions, donc commençons par faire une induction sur la dérivation de e* val. *Ça veut dire qu'il faut que je considère toutes les règles qui auraient pu être utilisées pour dériver e* val *pour ce e arbitraire qu'on a fixé.*

Nous procédons par induction sur la dérivation de e val pour démontrer une contradiction.

Cas où e val est formé par (SOS-NUM) (*c'est-à-dire, e* val *correspond à la conclusion de* (SOS-NUM)). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme $\mathsf{num}[n]$ val. *Il faut que je réussisse à démontrer une contradiction. Qu'est-ce que je sais ? On a supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que* $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. *Est-ce que c'est possible, ou est-ce que je peux utiliser ce fait pour trouver ma contradiction ? Si une telle réduction existe, il doit y avoir une règle qui l'a formée. Quelle règle ? En examinant toutes les règles, je vois qu'il n'y a pas de règles avec une conclusion de la forme* $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. *On vient de trouver notre contradiction ! On avait supposé que* $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$, *mais on vient de démontrer que c'est impossible que* $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$ *!* Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui

INF889J: Fondements pratiques des langages de programmation, automne 2024, Université du Québec à Montréal

ont une conclusion de la forme $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. C'est la contradiction désirée.

Remarque : si nous étions pédants, on aurait eu 12 sous-cas où on aurait énuméré chacune des règles qu'on a considérées et où on aurait écrit que chaque sous-cas était impossible parce que la conclusion de la règle n'a pas la forme $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$.

Cas où e val est formé par (SOS-TRUE). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme true val. Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{true} \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{true} \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{true} \mapsto e'$. C'est la contradiction désirée.

Cas où e val est formé par (SOS-FALSE). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme false val. Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{false} \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{false} \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{false} \mapsto e'$. C'est une contradiction désirée.

Si on veut être un peu pédant, on peut informer le lecteur qu'on a considéré tous les cas possibles de l'induction, c'est-à-dire, toutes les règles qui auraient put former e val *:* Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons la proposition par induction. □

Voici la démonstration sans dialogue interne :

DÉMONSTRATION. Soit une expression e arbitraire. Supposons au contraire que e val et qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$. Nous procédons par induction sur la dérivation de e val pour démontrer une contradiction.

Cas où e val est formé par (SOS-NUM). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme $\mathsf{num}[n]$ val. Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$. C'est la contradiction désirée.

Cas où e val est formé par (SOS-TRUE). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme true val. Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{true} \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{true} \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{true} \mapsto e'$. C'est la contradiction désirée.

Cas où e val est formé par (SOS-FALSE). Dans ce cas, nous savons que e val est de la forme false val. Nous avons aussi supposé qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$, c'est-à-dire, tel que $\mathsf{false} \mapsto e'$. Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{false} \mapsto e'$, donc c'est impossible que $\mathsf{false} \mapsto e'$. C'est une contradiction désirée.

Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons la proposition par induction. □

Voici la même démonstration dans un style plus déductif. Dans chaque cas, je forme une liste de déductions, où la justification est donnée à la droite de la ligne. (Désolé, je n'ai pas le temps de me battre avec LaTeX pour traduire le texte généré par `cleveref`.) Chaque liste dans les cas est une continuation de la liste au début de la preuve.

DÉMONSTRATION. Soit une expression e arbitraire. Supposons au contraire que e val et qu'il existe un e' tel que $e \mapsto e'$:

(1) e val — hypothèse

(2) il existe un e' tel que $e \mapsto e'$ — hypothèse

Nous procédons par induction sur la dérivation de e val pour démontrer une contradiction.

Cas où e val est formé par (SOS-NUM).

(3) (e val) = ($\mathsf{num}[n]$ val) — ce cas

(4) $e = \mathsf{num}[n]$ par item 3

(5) il existe un e' tel que $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$ items 2 and 4

Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{num}[n] \mapsto e'$, donc item 5 est impossible. C'est la contradiction désirée.

Cas où e val est formé par (SOS-TRUE).

(3) $(e\ \mathsf{val}) = (\mathsf{true}\ \mathsf{val})$ ce cas

(4) $e = \mathsf{true}$ par item 3

(5) il existe un e' tel que $\mathsf{true} \mapsto e'$ items 2 and 4

Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{true} \mapsto e'$, donc item 5 est impossible. C'est la contradiction désirée.

Cas où e val est formé par (SOS-FALSE).

(3) $(e\ \mathsf{val}) = (\mathsf{false}\ \mathsf{val})$ ce cas

(4) $e = \mathsf{false}$ par item 3

(5) il existe un e' tel que $\mathsf{false} \mapsto e'$ items 2 and 4

Cependant, il n'y a pas de règles qui ont une conclusion de la forme $\mathsf{true} \mapsto e'$, donc item 5 est impossible. C'est la contradiction désirée.

Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons la proposition par induction. □

2 Déterminisme

PROPOSITION 2.1. *Si $e \mapsto e_1$ et $e \mapsto e_2$, alors $e_1 = e_2$.*

DÉMONSTRATION. *Le résultat que je veux prouver a la forme "Si A, alors B". Ça veut dire qu'il faut que je démontre B en supposant A. En particulier, il faut que je suppose que $e \mapsto e_1$ et $e \mapsto e_2$ et que je démontre que $e_1 = e_2$. Pour être très complèts, écrivons nos hypothèses :*

Supposons que $e \mapsto e_1$ et que $e \mapsto e_2$.

Là j'ai deux hypothèses, mais je ne sais rien d'autre. Quoi faire. Bien, je sais que les deux hypothèses sont des jugements définis par induction, donc je peux raisonner à leur sujet par induction. Peut-être que je pourrais procéder par induction sur l'une des deux hypothèses. Est-ce qu'il y en a une qui semble plus prometteuse que l'autre ? Non, elles sont complètement symmétriques, donc choisissons la première un peu par hasard.

Procédons par induction sur la dérivation de $e \mapsto e_1$.

C'est un jugement défini par induction, donc il faut considérer les douzes règles qui définissent le jugement (appendix A.2) une à une. Il n'y a aucun ordre particulier, mais souvent c'est plus facile de commencer par les cas de base (les axiomes / les règles sans prémisses). Allons-y !

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS). *Je commence toujours par énumérer tout ce que je sais et ce que je veux démontrer : ça me permet de voir plus facilement comment combiner ce que je sais déjà pour atteindre mon objectif. Qu'est-ce que je sais au sujet de ce cas ?* Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS), donc $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n])$. *Il n'y a pas de prémisses à la règle, donc je ne sais rien d'autre. Qu'est-ce que je cherche à démontrer dans ce cas particulier ?* Nous devons démontrer que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$. *Là il faut que je trouve un moyen de raisonner au sujet de e_2. Lesquelles de mes hypothèses me donnent des informations au sujet de e_2 ? Seulement l'hypothèse $e \mapsto e_2$. Peut-être je peux faire une induction sur celle-ci, ou une analyse de cas la règle qui a été utilisée pour la former, pour démontrer que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$. Essayons.* Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a été utilisée pour former $e \mapsto e_2$. *J'examine toutes les règles qui auraient pu être utilisées pour former ce jugement. Je vois qu'il y en a*

trois : (SOS-PLUS), (SOS-PLUS-1) *et* (SOS-PLUS-2). Les seules règles avec une conclusion de la forme $\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto e_2$ sont (SOS-PLUS), (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS). Dans ce cas, $e \mapsto e_2$ est $\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n]$, donc nous concluons que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$ comme désiré.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce cas, $e \mapsto e_2$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-1), donc $e \mapsto e_2$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ *(c'est la conclusion de la règle, mais j'ai dû renommer les métavariables e_1 et e_2 qui sont dans la règle pour éviter la confusion avec les e_1 et les e_2 qu'on a déjà utilisés)* à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. *Là je me trouve un peu étonné : je suis censé démontrer que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$, mais je me trouve dans un sous-cas où $e_2 = \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$. C'est une situation qui est impossible selon le résultat que je veux démontrer, donc je décide d'essayer de démontrer une contradiction pour montrer que c'est un sous-cas impossible. Comment démontrer une contradiction ? Je décide d'énumérer tout ce que je sais :*

(1) $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n])$

(2) $e = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n])$

(3) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4'))$

(4) $e_3 = \mathsf{num}[m] \mapsto e_3'$

(5) $e_4 = \mathsf{num}[n]$

Attends ! Le fait qu'un $\mathsf{num}[m] \mapsto e_3'$ *est impossible ! On sait par* (SOS-NUM) *que* $\mathsf{num}[m]$ val, *et on a prouvé la finalité des valeurs (proposition 1.1).* Cependant, nous sommes dans le cas où $e = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n])$, donc $e_3 = \mathsf{num}[m]$. Nous savons que e_3 val par (SOS-NUM), donc c'est impossible que $e_3 \mapsto e_3'$ selon la proposition 1.1. Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). *Je vous invite à compléter ce cas.*

Nous avons considéré les trois sous-cas possibles, donc nous concluons le résultat pour le cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS).

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-1). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-1), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ *(c'est la conclusion de la règle, mais j'ai dû renommer les métavariables e_1 et e_2 qui sont dans la règle pour éviter la confusion avec les e_1 et les e_2 qu'on a déjà utilisés)* à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$ *(la transition est la prémisse de la règle). Pour savoir ce que je dois démontrer, je fais la substitution du e_1 donné par le cas dans l'énoncé du théorème.* Nous voulons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = e_2$. *Comme dans le cas précédant, la seule hypothèse qui parle de e_2 est celle qui dit que $e \mapsto e_2$. En examinant rapidement les règles, je vois qu'il y a seulement deux règles qui auraient pu être utilisées pour démontrer que $e \mapsto e_2$.* Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_5$. *Ça fait longtemps que je travaille sur cette preuve, où en suis-je ? Je me rappelle de ce que je sais et de ce que je dois démontrer.* Nous devons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$. *Voici tout ce que je sais à présent :*

(1) $e = \mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = e_1$ *(le cas)*

(2) $e_3 \mapsto e_3'$ *(la prémisse du cas)*

(3) si $e_3 \mapsto e_3'$ et $e_3 \mapsto e_3''$ pour un e_3'' quelconque, alors $e_3' = e_3''$ (l'hypothèse de récurrence pour le cas)

(4) $e = \mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_5;\ e_4) = e_2$ *(le sous-cas)*

(5) $e_3 \mapsto e_5$ *(la prémisse du sous-cas)*

Je vois que je pourrais utiliser les transitions $e_3 \mapsto e_3'$ *et* $e_3 \mapsto e_5$ *et l'hypothèse de récurrence pour démontrer* $e_3' = e_5$*. Est-ce utile ? Tout à fait ! Si* $e_3' = e_5$*, alors* $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$*.* L'hypothèse de récurrence du cas nous dit que si $e_3 \mapsto e_3'$ et $e_3 \mapsto e_3''$ pour un e_3'' quelconque, alors $e_3' = e_3''$. En utilisant l'hypothèse de récurrence donnée par la prémisse $e_3 \mapsto e_3'$ du cas avec la prémisse $e_3 \mapsto e_5$, nous concluons $e_3' = e_5$. Ça nous permet de conclure que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$, tel que désiré.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$ à cause de e_3 val et d'une transition $e_4 \mapsto e_4'$. *Nous devons démontrer que* $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$*. Il y a quelque chose qui cloche : dans le cas on a fait la transition* $e_3 \mapsto e_3'$ *mais dans le sous-cas on dit que* e_3 val. C'est une contradition selon le théorème de finalité des valeurs : ce n'est pas possible que e_3 val et que $e_3 \mapsto e_3'$. Nous concluons que ce sous-cas est impossible.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-2). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-2), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$ à cause de e_3 val et d'une transition $e_4 \mapsto e_4'$. Nous voulons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4') = e_2$. *Ayant fait deux cas semblables, je me dit que la preuve de ce cas-ci sera probablement semblable. J'écris l'hypothèse de récurrence pour me guider dans ma preuve. Vu que c'est une preuve par induction, il faut souvent que j'utilise mon hypothèse de récurrence pour démontrer le résultat.* L'hypothèse de récurrence pour la prémisse $e_4 \mapsto e_4'$ nous dit que si $e_4 \mapsto e_5$ pour un e_5 quelconque, alors $e_4' = e_5$. *En l'énonçant, je sais maintenant que j'aurai probablement besoin d'établir un lien entre la transition* $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto e_2$ *et une transition* $e_4 \mapsto e_5$ *quelconque, et démontrer que* e_2 *contient* e_5*.* Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. *Je vois que ce sous-cas-ci est la symmétrique au sous-cas* (SOS-PLUS-2) *du cas* (SOS-PLUS-1)*, donc je m'attends à ce que la preuve soit presque identique.* Cependant, nous savons que e_3 val à cause du cas, donc selon le théorème de la finalité des valeurs, c'est impossible que $e_3 \mapsto e_3'$. Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_5)$ à cause de e_3 val et une transition $e_4 \mapsto e_5$. *Aha ! C'est exactement le lien entre une transition à partir de* e_4 *et la transition* $e \mapsto e_2$ *que je cherchais !* L'hypothèse de récurrence nous donne que $e_4' = e_5$. Nous concluons que $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4') = \mathsf{plus}(e_3;\ e_5) = e_2$ tel que désiré.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET1). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-LET1), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e_3';\ x.e_5)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. Nous voulons démontrer que $\mathsf{let}(e_3';\ x.e_5) = e_2$. *Vu que tous les cas précédants ont été démontrés avec plus ou moins la même approche, que ce serait bien de l'essayer dans ce cas-ci.* Par analyse de cas sur la règle qui a formé $e \mapsto e_2$, nous savons que le jugement a été formé par la règle (SOS-LET1). En particulier, $e \mapsto e_2$ a la forme $\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5)$ où $e_3 \mapsto e_4$. L'hypothèse de récurrence pour la prémisse $e_3 \mapsto e_3'$ nous dit que si $e_3 \mapsto e'$ pour un e' quelconque, alors $e_3' = e'$. Cela nous permet de déduire que $e_3' = e_4$, et donc déduire que $\mathsf{let}(e_3';\ x.e_5) = \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5) = e_2$ tel que désiré.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET2). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-TRUE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-FALSE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-1). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-2). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-TRUE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-FALSE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF). Exercice.
Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons le résultat par induction. □

La version sans monologue :

Démonstration. Supposons que $e \mapsto e_1$ et que $e \mapsto e_2$. Procédons par induction sur la dérivation de $e \mapsto e_1$.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS), donc $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n])$. Nous devons démontrer que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$. Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a été utilisée pour former $e \mapsto e_2$. Les seules règles avec une conclusion de la forme $\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto e_2$ sont (SOS-PLUS), (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS). Dans ce cas, $e \mapsto e_2$ est $\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n]$, donc nous concluons que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$ comme désiré.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce cas, $e \mapsto e_2$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-1), donc $e \mapsto e_2$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. Cependant, nous sommes dans le cas où $e = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n])$, donc $e_3 = \mathsf{num}[m]$. Nous savons que e_3 val par (SOS-NUM), donc c'est impossible que $e_3 \mapsto e_3'$ selon la proposition 1.1. Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Exercice.

Nous avons considéré les trois sous-cas possibles, donc nous concluons le résultat pour le cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS).

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-1). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-1), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. Nous voulons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = e_2$. Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_5$. Nous devons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$. L'hypothèse de récurrence du cas nous dit que si $e_3 \mapsto e_3'$ et $e_3 \mapsto e_3''$ pour un e_3'' quelconque, alors $e_3' = e_3''$. En utilisant l'hypothèse de récurrence donnée par la prémisse $e_3 \mapsto e_3'$ du cas avec la prémisse $e_3 \mapsto e_5$, nous concluons $e_3' = e_5$. Ça nous permet de conclure que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$, tel que désiré.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$ à cause de e_3 val et d'une transition $e_4 \mapsto e_4'$. C'est une contradition selon le théorème de finalité des valeurs : ce n'est pas possible que e_3 val et que $e_3 \mapsto e_3'$. Nous concluons que ce sous-cas est impossible.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-2). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-PLUS-2), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$ à cause de e_3 val et d'une transition $e_4 \mapsto e_4'$. Nous voulons démontrer que $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4') = e_2$. L'hypothèse de récurrence pour la prémisse $e_4 \mapsto e_4'$ nous dit que si $e_4 \mapsto e_5$ pour un e_5 quelconque, alors $e_4' = e_5$. Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e_3'$. Cependant, nous savons que e_3 val à cause du cas, donc selon le théorème de la finalité des valeurs, c'est impossible que $e_3 \mapsto e_3'$. Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Dans ce sous-cas, $e \mapsto e_2$ est de la forme $\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_5)$ à cause de e_3 val et une transition $e_4 \mapsto e_5$. L'hypothèse de récurrence nous donne que $e'_4 = e_5$. Nous concluons que $\mathsf{plus}(e_3;\ e'_4) = \mathsf{plus}(e_3;\ e_5) = e_2$ tel que désiré.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET1). Dans ce cas, $e \mapsto e_1$ est la conclusion de la règle (SOS-LET1), donc $e \mapsto e_1$ a la forme $\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5)$ à cause d'une transition $e_3 \mapsto e'_3$. Nous voulons démontrer que $\mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5) = e_2$. Par analyse de cas sur la règle qui a formé $e \mapsto e_2$, nous savons que le jugement a été formé par la règle (SOS-LET1). En particulier, $e \mapsto e_2$ a la forme $\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5)$ où $e_3 \mapsto e_4$. L'hypothèse de récurrence pour la prémisse $e_3 \mapsto e'_3$ nous dit que si $e_3 \mapsto e'$ pour un e' quelconque, alors $e'_3 = e'$. Cela nous permet de déduire que $e'_3 = e_4$, et donc déduire que $\mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5) = \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5) = e_2$ tel que désiré.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET2). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-TRUE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-FALSE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-1). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-2). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-TRUE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-FALSE). Exercice.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF). Exercice.

Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons le résultat par induction. □

La version sous forme de liste déductive. J'adopte la convention que la numérotation recommence pour chaque cas, mais que la numérotation de chaque sous-cas est une continuation de celle du cas.

Démonstration. Supposons que $e \mapsto e_1$ et que $e \mapsto e_2$. Procédons par induction sur la dérivation de $e \mapsto e_1$.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS).

(1) $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n])$ ce cas

(2) $e_1 = \mathsf{num}[m+n]$ item 1

Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a été utilisée pour former $e \mapsto e_2$ pour démontrer que $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS) et (SOS-PLUS-1).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS).

(3) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n])$ ce sous-cas

(4) $e_2 = \mathsf{num}[m+n]$ item 3

C'est ce que nous voulions démontrer.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1).

(3) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e'_3;\ e_4))$ ce sous-cas

(4) $e_3 \mapsto e'_3$ ce sous-cas (prémisse)

(5) $e = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n])$ item 1

(6) $e_3 = \mathsf{num}[m]$ items 1 and 3

(7) e_3 val item 6, (SOS-NUM)

(8) contradiction proposition 1.1 and items 4 and 7

Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2). Exercice.

Nous avons considéré les trois sous-cas possibles, donc nous concluons le résultat pour le cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-PLUS).

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-1).

(1) $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4))$ pour e_3, e_4, e_3' quelconques — ce cas

(2) $e_3 \mapsto e_3'$ — ce cas (prémisse)

(3) si $e_3 \mapsto e'$, alors $e_3' = e'$ — hypothèse de récurrence pour la prémisse item 2

Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$ pour démontrer que $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = e_2$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1)

(4) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_5;\ e_4))$ pour un e_5 quelconque — ce sous-cas

(5) $e_3 \mapsto e_5$ — ce sous-cas (prémisse)

(6) $e_2 = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$ — item 4

(7) $e_3' = e_5$ — items 3 and 5

(8) $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = \mathsf{plus}(e_5;\ e_4)$ — item 7

(9) $\mathsf{plus}(e_3';\ e_4) = e_2$ — items 6 and 8

C'est ce que nous voulions démontrer.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2).

(4) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4'))$ pour e_4' quelconque — ce sous-cas

(5) e_3 val — ce sous-cas (prémisse)

(6) $e_4 \mapsto e_4'$ — ce sous-cas (prémisse)

(7) contradiction — proposition 1.1 and items 2 and 5

Nous concluons que ce sous-cas est impossible.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par la règle (SOS-PLUS-2).

(1) $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_4'))$ pour e_3, e_4, e_4' quelconques — ce cas

(2) e_3 val — ce cas (prémisse)

(3) $e_4 \mapsto e_4'$ — ce cas (prémisse)

(4) si $e_4 \mapsto e_5$ pour e_5 quelconque, alors $e_4' = e_5$ — hypothèse de récurrence pour item 3

Nous procédons par analyse de cas sur la règle qui a formée $e \mapsto e_2$ pour démontrer que $e_2 = \mathsf{plus}(e_3;\ e_4')$. Les seules règles possibles sont (SOS-PLUS-1) et (SOS-PLUS-2).

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-1).

(5) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3';\ e_4))$ pour e_3' quelconque — ce sous-cas

(6) $e_3 \mapsto e_3'$ — ce sous-cas (prémisse)

(7) contradiction — proposition 1.1 and items 2 and 6

Ce sous-cas est donc impossible.

Sous-cas où $e \mapsto e_2$ a été formé par (SOS-PLUS-2).

(5) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{plus}(e_3;\ e_4) \mapsto \mathsf{plus}(e_3;\ e_5))$ pour e_5 quelconque — ce sous-cas

(6) e_3 val — ce sous-cas (prémisse)

(7) $e_4 \mapsto e_5$ — ce sous-cas (prémisse)

(8) $e_2 = \mathsf{plus}(e_3;\ e_5)$ — item 5

(9) $e_4' = e_5$ — items 4 and 7

(10) $\mathsf{plus}(e_3;\ e'_4) = \mathsf{plus}(e_3;\ e_5)$ item 9

(11) $e_2 = \mathsf{plus}(e_3;\ e'_4)$ items 8 and 10

C'est ce qu'il fallait démontrer dans ce sous-cas.

Nous avons considéré tous les sous-cas, donc nous concluons résultat pour le cas.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET1).

(1) $(e \mapsto e_1) = (\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5))$ pour e_3, e_5, e'_3 quelconques ce cas

(2) $e_3 \mapsto e'_3$ ce cas (prémisse)

(3) si $e_3 \mapsto e'$ pour e' quelconque, alors $e'_3 = e'$ hypothèse de récurrence pour item 2

Nous voulons démontrer que $\mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5) = e_2$. Par analyse de cas sur la règle qui a formé $e \mapsto e_2$, nous savons que le jugement a été formé par la règle (SOS-LET1).

(4) $(e \mapsto e_2) = (\mathsf{let}(e_3;\ x.e_5) \mapsto \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5))$ pour e_4 quelconque ce sous-cas

(5) $e_3 \mapsto e_4$ ce sous-cas (prémisse)

(6) $e_2 = \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5)$ item 4

(7) $e'_3 = e_4$ items 3 and 5

(8) $\mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5) = \mathsf{let}(e_4;\ x.e_5)$ item 7

(9) $\mathsf{let}(e'_3;\ x.e_5) = e_2$ items 6 and 8.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LET2). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-TRUE). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-FALSE). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-1). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-LT-2). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-TRUE). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF-FALSE). Exercice.
Cas où $e \mapsto e_1$ a été formé par (SOS-IF). Exercice.

Nous avons considéré tous les cas, donc nous concluons le résultat par induction. □

A Expressions

A.1 Grammaire

Où $n \in \mathbb{N}$ et où $x, y, z \in V$ sont nos variables, les arbres de syntaxe abstraite pour notre langage d'expressions sont donnés par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} e ::= {} & \mathsf{num}[n] \\ \mid {} & \mathsf{true} \\ \mid {} & \mathsf{false} \\ \mid {} & \mathsf{plus}(e_1;\ e_2) \\ \mid {} & \mathsf{lt}(e_1;\ e_2) \\ \mid {} & \mathsf{if}(e_1;\ e_2;\ e_3) \\ \mid {} & x \\ \mid {} & \mathsf{let}(e_1;\ x.e_2) \end{aligned}$$

A.2 Sémantique opérationnelle : petites étapes

$\boxed{e\ \mathsf{val}}$ e est une valeur

$$\frac{}{\mathsf{num}[n]\ \mathsf{val}}\ (\textsc{sos-num}) \qquad \frac{}{\mathsf{true}\ \mathsf{val}}\ (\textsc{sos-true}) \qquad \frac{}{\mathsf{false}\ \mathsf{val}}\ (\textsc{sos-false})$$

$\boxed{e_1 \mapsto e_2}$ e_1 se réduit à e_2 en une étape

$$\frac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{num}[m+n]}\ (\textsc{sos-plus})$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{plus}(e_1;\ e_2) \mapsto \mathsf{plus}(e_1';\ e_2)}\ (\textsc{sos-plus-1}) \qquad \frac{e_1\ \mathsf{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathsf{plus}(e_1;\ e_2) \mapsto \mathsf{plus}(e_1;\ e_2')}\ (\textsc{sos-plus-2})$$

$$\frac{m < n}{\mathsf{lt}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{true}}\ (\textsc{sos-lt-true}) \qquad \frac{\neg(m < n)}{\mathsf{lt}(\mathsf{num}[m];\ \mathsf{num}[n]) \mapsto \mathsf{false}}\ (\textsc{sos-lt-false})$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{lt}(e_1;\ e_2) \mapsto \mathsf{lt}(e_1';\ e_2)}\ (\textsc{sos-lt-1}) \qquad \frac{e_1\ \mathsf{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathsf{lt}(e_1;\ e_2) \mapsto \mathsf{lt}(e_1;\ e_2')}\ (\textsc{sos-lt-2})$$

$$\frac{}{\mathsf{if}(\mathsf{true};\ e_1;\ e_2) \mapsto e_1}\ (\textsc{sos-if-true}) \qquad \frac{}{\mathsf{if}(\mathsf{false};\ e_1;\ e_2) \mapsto e_2}\ (\textsc{sos-if-false})$$

$$\frac{e_0 \mapsto e_0'}{\mathsf{if}(e_0;\ e_1;\ e_2) \mapsto \mathsf{if}(e_0';\ e_1;\ e_2)}\ (\textsc{sos-if})$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{let}(e_1;\ x.e_2) \mapsto \mathsf{let}(e_1';\ x.e_2)}\ (\textsc{sos-let1}) \qquad \frac{e_1\ \mathsf{val}}{\mathsf{let}(e_1;\ x.e_2) \mapsto [e_1/x]e_2}\ (\textsc{sos-let2})$$

A.3 Sémantique opérationnelle : grosses étapes

$\boxed{e \Downarrow v}$ e évalue à v

$$\frac{}{\mathsf{num}[n] \Downarrow \mathsf{num}[n]}\ (\textsc{ev-num}) \qquad \frac{}{\mathsf{true} \Downarrow \mathsf{true}}\ (\textsc{ev-true}) \qquad \frac{}{\mathsf{false} \Downarrow \mathsf{false}}\ (\textsc{ev-false})$$

$$\frac{e_1 \Downarrow \mathsf{num}[m] \quad e_2 \Downarrow \mathsf{num}[n]}{\mathsf{plus}(e_1;\ e_2) \Downarrow \mathsf{num}[m+n]}\ (\textsc{ev-plus})$$

$$\frac{e_1 \Downarrow \mathsf{num}[m] \quad e_2 \Downarrow \mathsf{num}[n] \quad m < n}{\mathsf{lt}(e_1;\ e_2) \Downarrow \mathsf{true}}\ (\textsc{ev-lt-true})$$

$$\frac{e_1 \Downarrow \mathsf{num}[m] \quad e_2 \Downarrow \mathsf{num}[n] \quad \neg(m < n)}{\mathsf{lt}(e_1;\ e_2) \Downarrow \mathsf{false}}\ (\textsc{ev-lt-false})$$

$$\frac{e_1 \Downarrow \mathsf{true} \quad e_2 \Downarrow v}{\mathsf{if}(e_1;\ e_2;\ e_3) \Downarrow v}\ (\textsc{ev-if-true}) \qquad \frac{e_1 \Downarrow \mathsf{false} \quad e_2 \Downarrow v}{\mathsf{if}(e_1;\ e_2;\ e_3) \Downarrow v}\ (\textsc{ev-if-false})$$

$$\frac{e_1 \Downarrow v \quad [v/x]e_2 \Downarrow w}{\mathsf{let}(e_1;\ x.e_2) \Downarrow w}\ (\textsc{ev-let})$$

A.4 Système de typage

Les types τ sont données par la grammaire

$$\tau ::= \mathbf{nat} \mid \mathbf{bool}.$$

On écrit $e : \tau$ pour dire que l'expression e a le type τ. Un contexte Γ est une liste $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$, où les variables x_i sont distinctes entre elles.

$\boxed{\Gamma \vdash e : \tau}$ L'expression e a le type τ en supposant que les variables ont les types données par Γ

$$\frac{(x : \tau) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}\ (\textsc{Tp-Var}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{num}[n] : \mathbf{nat}}\ (\textsc{Tp-Num})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathbf{bool}}\ (\textsc{Tp-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathbf{bool}}\ (\textsc{Tp-False})$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{nat} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{plus}(e_1;\ e_2) : \mathbf{nat}}\ (\textsc{Tp-Plus}) \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{nat} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{lt}(e_1;\ e_2) : \mathbf{bool}}\ (\textsc{Tp-Lt})$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau \quad \Gamma \vdash e_3 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{if}(e_1;\ e_2;\ e_3) : \tau}\ (\textsc{Tp-If}) \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma, x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{let}(e_1;\ x.e_2) : \tau_2}\ (\textsc{Tp-Let})$$